

RCWA のフォーミュレーション

グレーティングによる回折効率の解析には、厳密結合波理論 (RCWA、rigorous coupled-wave analysis) がよく用いられる。RCWA に関する代表的な review 論文、

- [1] J. Opt. Soc. Am. A 12, 1068 (1995), M. G. Moharam, E. B. Grann, and D. A. Pommet, Formulation of stable and efficient implementation of the rigorous coupled-wave analysis of binary gratings

に従って、RCWA のフォーミュレーションを説明する。座標軸や文字の定義も論文にほぼ従っているが、typo とと思われる数式の間違いの訂正と多少の補足を加えている。この他には、

- [2] J. Opt. Soc. Am. A 13, 779-784 (1996), P. Lalanne and G. M. Morris, Highly improved convergence of the coupled-wave method for TM polarization
- [3] J. Opt. Soc. Am. A 14, 1592-1598 (1997), Philippe Lalanne, Improved formulation of the coupled-wave method for two-dimensional gratings

などを参考にした。

1 アウトライン

空間を z 軸に沿って次の三つの領域に分けて考える。

1. 光が入射する部分 (領域 I, $z < 0$)
2. 回折格子の領域 (グレーティング領域, $0 \leq z < d$)
3. 光が出て行く領域 (領域 II, $d \leq z$)

最初に三つの領域中の電場と磁場を、 x 軸方向への波数が異なる波を基底として展開する。そのときの展開係数が後で決定すべき未知数になる。次に、三つの領域を分ける二つの境界面において、電場と磁場の接線成分が連続である条件を課す。そこから展開係数に関する一次方程式を得る。最後に、その一次方程式を解くことで反射側、透過側における回折効率を計算する。

RCWA は、数学的には行列の固有値問題と一次方程式を解くことに帰着されるので、原理的な困難さはない。しかし、実際に計算させるときには、0 に近い係数行列が出現する場合があります、数値的に不安定

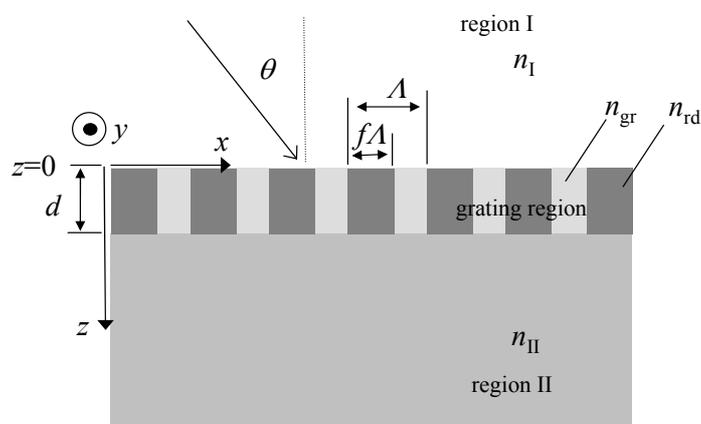


図 1: グレーティングの配置と座標系の定義

な計算結果をもたらす恐れがある。[1] の論文では、その問題をうまく回避するフォーミュレーションを与えている。

2 TE 波の場合

2.1 領域 I と II の電場を表す

TE 波は入射電場の x, z 成分がゼロで、 y 成分だけが値を持つ。振幅を 1 に規格化した入射電場の y 成分を次のように表す。

$$E_{\text{inc},y} = \exp[-jk_0 n_{\text{I}} (\sin \theta x + \cos \theta z)] \quad (1)$$

時間依存は $\exp(+j\omega t)$ を仮定してあり、全ての項に共通になるので表記は省略してある。 n_{I} は入射領域 ($z < 0$) の屈折率で、波数ベクトルが $\mathbf{k}_{\text{I}} = k_0 n_{\text{I}} (\sin \theta, 0, \cos \theta)$ で与えられる平面波を仮定している。入射角度 θ は z 軸（回折格子の面に垂直な軸）と波数ベクトルのなす角度になる。 k_0 は真空中での波長 λ_0 を用いて、

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \quad (2)$$

で与えられ、真空中の波数ベクトルの大きさである。

平面波がグレーティングで回折されたとき、逆格子ベクトルの整数倍だけ波数ベクトルの x 成分が変化を受ける。従って、 i 次の回折光の波数ベクトルの x 成分は次式で与えられる。

$$k_{xi} = (\mathbf{k}_{\text{I}})_x - \frac{2\pi}{\Lambda} i = k_0 \left(n_{\text{I}} \sin \theta - \frac{\lambda_0}{\Lambda} i \right) \quad (3)$$

ここで Λ は回折格子の格子間隔で、対応する逆格子ベクトルは $2\pi/\Lambda$ になる。一方、波数ベクトルの z 成分 k_{zi} は、マクスウェルの方程式から導かれる分散関係、

$$k_{xi}^2 + k_{zi}^2 = \varepsilon \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 = (k_0 n)^2 \quad (4)$$

を満たすように決定する。ここで、 ϵ_0, μ_0 は真空の誘電率と透磁率、 ε は比誘電率、 $n \equiv \sqrt{\varepsilon}$ は屈折率である。すなわち k_{zi} は

$$k_{l,zi} = \begin{cases} +k_0 \sqrt{n_l^2 - (k_{xi}/k_0)^2} & (k_0 n_l > |k_{xi}| \text{ のとき}) \\ -jk_0 \sqrt{(k_{xi}/k_0)^2 - n_l^2} & (k_0 n_l < |k_{xi}| \text{ のとき}) \end{cases} \quad (5)$$

で与えられる。 l には領域を示す添え字 (I か II) が入る。 x 軸方向の波数 k_{xi} が小さい場合には、 k_{zi} は実数なので伝播する回折光が生じることに対応している。一方、 k_{xi} の絶対値が大きい場合（次数の高い回折光の場合）には、 k_{zi} は純虚数となり、 z 方向には指数関数で減衰する波（エバネッセント波）になる。実際の数値計算においては級数展開を有限の次元で打ち切ることになるが、その展開の高次のモードはエバネッセント波になる。エバネッセントの場合の波数の符号に、 $-$ がついているのは、 z が増加したときに減衰する波を表現するためである。（波の位相の空間側にマイナスをつけて定義したため。） x 軸方向の波数 k_{xi} に関しては、境界面での連続性からスネルの法則が成立するので、領域によって区別する必要はない。（論文 [1] の $k_{l,zi}$ の定義式では、場合分けの記述で $|k_{xi}|$ の絶対値が抜け落ちている。コーディングの際に間違いやすいので注意）

振幅反射率 R_i と振幅透過率 T_i を用いて、入射領域（領域 I）と出射領域（領域 II）の電場は次のようにかける。

$$E_{\text{I},y} = E_{\text{inc},y} + \sum_i R_i \exp\left(-j\left(k_{xi}x - k_{\text{I},zi}z\right)\right) \quad (6)$$

$$E_{\text{II},y} = \sum_i T_i \exp(-j(k_{xi}x + k_{\text{II},zi}(z - d))) \quad (7)$$

ここで d はグレーティング領域の厚さを表す。反射波は $-z$ 方向に進むので、波数の符号が $-$ になっている。(論文 [1] では、領域 II の z 方向の符号が $-$ になっているが $+$ の間違いと思われる。) また、 z 方向の位相原点を $z = 0$ ではなく $z = d$ に取っていることは、数値的に安定な定式化のために役立つことが後で分る。

2.2 グレーティング領域の電場を表す

回折格子領域の比誘電率 $\varepsilon(x)$ をフーリエ級数展開で表す。

$$\varepsilon(x) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \varepsilon_h \exp\left(j \frac{2\pi h x}{\Lambda}\right) \quad (8)$$

Λ は回折格子の格子間隔で j は虚数単位。 ε_h はフーリエ級数展開の関係式から、

$$\varepsilon_h = \frac{1}{\Lambda} \int_{-\Lambda/2}^{\Lambda/2} \varepsilon(x) \exp\left(-j \frac{2\pi x h}{\Lambda}\right) dx \quad (9)$$

で計算することができる。binary grating (グレーティングの形状が矩形の凹凸で、屈折率は x 方向にのみ変化する) を仮定すると、

$$\varepsilon_h = (n_{\text{rd}}^2 - n_{\text{gr}}^2) \frac{\sin(\pi h f)}{\pi h} \quad (h \neq 0) \quad (10)$$

$$\varepsilon_0 = n_{\text{rd}}^2 f + n_{\text{gr}}^2 (1 - f) \quad (h = 0) \quad (11)$$

が得られる。 $(\varepsilon_0$ は真空の誘電率 ε_0 と似ていて紛らわしいのだが、混同する場面は少ないので、[1] のままにしておく。) n_{rd} と n_{gr} はグレーティング部分を形成する二つの材質の屈折率を表す。(添え字の rd は ridge: 基板から飛び出した部分、gr は groove: へこんでいる部分からきていると思われる。)

グレーティング領域 ($0 < z < d$) の電磁場を表す展開基底 (モード) を得るために、電場の y 成分と磁場の x 成分を次のように展開する。

$$E_{\text{gr},y} = \sum_i S_{yi}(z) \exp(-jk_{xi}x) \quad (12)$$

$$H_{\text{gr},x} = -j \left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2} \sum_i U_{xi}(z) \exp(-jk_{xi}x) \quad (13)$$

ここで $S_{yi}(z)$ と $U_{xi}(z)$ が、これから決定すべき深さ (z) 方向依存性を表す関数である。マクスウェルの方程式、

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (14)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (15)$$

より、 $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ 、 $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ の関係式と時間依存性が $\exp(+j\omega t)$ であることを利用すると、

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mu_0 \mathbf{H} \quad (16)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \varepsilon(x) \mathbf{E} \quad (17)$$

がえられる。ここで電流密度 $\mathbf{i} = 0$ を仮定した。電場が y 成分しか持たないことを利用して、磁場の x 成分と電場の y 成分の関係式を式 (16-17) から次のように得ることができる、

$$\frac{\partial E_{\text{gr},y}}{\partial z} = j\omega \mu_0 H_{\text{gr},x} \quad (18)$$

$$\frac{\partial H_{\text{gr},x}}{\partial z} = j\omega \varepsilon_0 \varepsilon(x) E_{\text{gr},y} + \frac{\partial H_{\text{gr},z}}{\partial x} \quad (19)$$

式 (18) の両辺の項は式 (12-13) で級数展開されているので、各 k_{xi} での成分を等しいとすれば、

$$\frac{\partial S_{yi}(z)}{\partial z} = k_0 U_{xi}(z) \quad (20)$$

が得られる。ここで $\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = \omega/c = k_0$ を用いた。一方、式 (19) には展開されていない磁場の z 成分 $H_{gr,z}$ が含まれている。そこで、式 (16) から得られる式、

$$H_{gr,z} = \frac{j}{\omega\mu_0} \frac{\partial E_{gr,y}}{\partial x} \quad (21)$$

を x で微分すると、

$$\frac{\partial H_{gr,z}}{\partial x} = \frac{j}{\omega\mu_0} \frac{\partial^2 E_{gr,y}}{\partial x^2} \quad (22)$$

であるから、これを式 (19) に代入すると j 消去することができる。すなわち、

$$\frac{\partial H_{gr,x}}{\partial z} = j\omega\epsilon_0\epsilon(x)E_{gr,y} + \frac{j}{\omega\mu_0} \frac{\partial^2 E_{gr,y}}{\partial x^2} \quad (23)$$

$$= -j \left(\frac{\epsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} \left(-k_0\epsilon(x)E_{gr,y} + \frac{-1}{k_0} \frac{\partial^2 E_{gr,y}}{\partial x^2} \right) \quad (24)$$

である。これに、誘電率と電磁場に関する級数展開した式 (8)、(12)-(13) を代入、各 k_{xi} 成分を等しいと置くことで、次式が得られる。

$$\frac{\partial U_{xi}(z)}{\partial z} = -k_0 \sum_p \epsilon_{i-p} S_{yp} + \left(\frac{k_{xi}^2}{k_0} \right) S_{yi} \quad (25)$$

右辺第一項に関して具体的に計算すると次のようになる。

$$\epsilon(x)E_{gr,y} = \sum_h \epsilon_h \exp\left(j\frac{2\pi hx}{\Lambda}\right) \sum_p S_{yp}(z) \exp(-jk_{xp}x) \quad (26)$$

$$= \sum_p \sum_h \epsilon_h S_{yp}(z) \exp\left[-j\left(k_{xp} - \frac{2\pi h}{\Lambda}\right)x\right] \quad (27)$$

$$= \sum_p \sum_h \epsilon_h S_{yp}(z) \exp[-jk_{xp+h}x] \quad (28)$$

$$= \sum_i \sum_p \epsilon_{i-p} S_{yp}(z) \exp[-jk_{xi}x] \quad (29)$$

変形の途中では $k_{xp} - \frac{2\pi h}{\Lambda} = k_{xp+h}$ であることを用い、変数の置き換え $p+h=i$ を行った。

式 (20) と (25) は、 $z' = k_0 z$ のように無次元の変数を定義して、つぎのような行列形式に書き直すことができる。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{S}_y}{\partial(z')} \\ \frac{\partial \mathbf{U}_x}{\partial(z')} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{S}_y \\ \mathbf{U}_x \end{pmatrix} \quad (30)$$

ここで、行列 \mathbf{I} は単位行列を表し、 \mathbf{A} は次式で定義される行列である。

$$\mathbf{A} = \mathbf{K}_x^2 - \mathbf{E} \quad (31)$$

ここで、行列 \mathbf{K}_x は成分を k_{xi}/k_0 とする対角行列で、 \mathbf{E} は ϵ_{i-p} を ip 成分とする行列である。上の式をさらにまとめて一つの式で書くと、

$$\frac{\partial^2 \mathbf{S}_y}{\partial(z')^2} = \mathbf{A} \mathbf{S}_y \quad (32)$$

の形になる。

電場の展開係数 \mathbf{S}_y の z 依存性を $\exp(qk_0 z)$ の形に仮定とすると、上の式は

$$q^2 \mathbf{S}_y = \mathbf{A} \mathbf{S}_y \quad (33)$$

を意味する。したがって、行列 \mathbf{A} の m 番目の固有値を g_m とすると指数は $q_m = \pm\sqrt{g_m}$ になる。すなわち、固有値 g_m に対応する固有ベクトルを \mathbf{w}_m とすると、グレーティング領域を表す電磁場の固有モードが、

$$E_m = \sum_i w_{i,m} \exp(\pm q_m k_0 z) \exp(-j k_{xi} x) \quad (34)$$

のように得られたことになる。ここで $w_{i,m}$ は固有ベクトル \mathbf{w}_m の i 成分を表す。固有モード E_m は、 x 軸方向の波数が異なる波を重さ $w_{i,m}$ で重ね合わせた電場で、 z 軸方向への依存性は各項で共通して $\exp(\pm q_m k_0 z)$ になっている。したがって q_m が実数の場合にはエバネッセント波を表し、純虚数であれば伝播する波になる。

ところで行列 \mathbf{A} の固有値は必ず実数になる。なぜなら式 (31) の第一項の行列は、実の成分を持つ対角成分なのでエルミート行列である。また、第二項は \mathbf{E} の成分を定義する式 (9) を見ると、誘電率 $\varepsilon(x)$ は実数であることから、 $\varepsilon_{-h}^* = \varepsilon_h$ である。エルミート行列の和はエルミート行列であるから、行列 \mathbf{A} の固有値は実数になる。

上で計算された固有モードに対応する磁場は、式 (30) の上半分の式から、 z' で微分することにより

$$H_m = -j \left(\frac{\epsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} \sum_i w_{i,m} (\pm) q_m \exp(\pm q_m k_0 z) \exp(-j k_{xi} x) \quad (35)$$

と計算できる。

グレーティング領域内の一般の電磁場は、一つの固有値 q_m に対して z 軸の両方向に進む波があること、そして異なるモードの重ね合わせを考慮に入れて次のように展開できる。

$$S_{yi}(z) = \sum_{m=1}^n w_{i,m} (c_m^+ \exp[-k_0 q_m z] + c_m^- \exp[k_0 q_m (z-d)]) \quad (36)$$

$$U_{xi}(z) = \sum_{m=1}^n v_{i,m} (-c_m^+ \exp[-k_0 q_m z] + c_m^- \exp[k_0 q_m (z-d)]) \quad (37)$$

ここで、 c_m^+ と c_m^- は後で決定されるべき未知数で、 m 番目のモードの $+z$ 方向と $-z$ 方向に進む波の展開係数である。 $v_{i,m}$ は $v_{i,m} = w_{i,m} q_m$ で定義され、 $v_{i,m}$ を係数とする行列 \mathbf{V} を用いるならば、 q_m を対角成分とする対角行列 \mathbf{Q} と成分が $w_{i,m}$ である行列 \mathbf{W} を用いて、 $\mathbf{V} = \mathbf{WQ}$ とかける。

2.3 境界条件を課す

三つの領域で級数展開の形で表された電場と磁場の連続条件を考える。領域 I と II の磁場の x 成分に関しては、マクスウェルの方程式 (式 (16)) から、

$$H_x = - \left(\frac{j}{\omega \mu_0} \right) \frac{\partial E_y}{\partial z} \quad (38)$$

$$= -j \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{1}{k_0} \frac{\partial E_y}{\partial z} \quad (39)$$

を用いて計算できる。各領域での電場と磁場をまとめて書くと、次のようになる。

領域 I

$$E_{I,y} = E_{\text{inc},y} + \sum_i R_i \exp \left[-j (k_{xi} x - k_{I,zi} z) \right] \quad (40)$$

$$E_{\text{inc},y} = \exp \left[-j k_0 n_I (\sin \theta x + \cos \theta z) \right] \quad (41)$$

$$H_{I,x} = H_{\text{inc},x} - j \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \sum_i R_i \frac{+j k_{I,zi}}{k_0} \exp \left[-j (k_{xi} x - k_{I,zi} z) \right] \quad (42)$$

$$H_{\text{inc},x} = -j \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (-j n_I \cos \theta) \exp \left[-j k_0 n_I (\sin \theta x + \cos \theta z) \right] \quad (43)$$

グレーティング領域

$$E_{\text{gr},y} = \sum_i S_{yi}(z) \exp(-jk_{xi}x) \quad (44)$$

$$H_{\text{gr},x} = -j\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \sum_i U_{xi}(z) \exp(-jk_{xi}x) \quad (45)$$

$$S_{yi}(z) = \sum_{m=1}^n w_{i,m} (c_m^+ \exp[-k_0 q_m z] + c_m^- \exp[k_0 q_m (z-d)]) \quad (46)$$

$$U_{xi}(z) = \sum_{m=1}^n v_{i,m} (-c_m^+ \exp[-k_0 q_m z] + c_m^- \exp[k_0 q_m (z-d)]) \quad (47)$$

領域 II

$$E_{\text{II},y} = \sum_i T_i \exp[-j(k_{xi}x + k_{\text{II},zi}(z-d))] \quad (48)$$

$$H_{\text{II},x} = -j\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \sum_i T_i \frac{-jk_{\text{II},zi}}{k_0} \exp[-j(k_{xi}x + k_{\text{II},zi}(z-d))] \quad (49)$$

$z=0$ において、電場と磁場の接線成分 (x と y 方向) が連続であることを用いる。領域 I とグレーティング領域での各 k_{xi} 成分の項が等しいとすると、

$$\delta_{i0} + R_i = \sum_{m=1}^n w_{i,m} (c_m^+ + c_m^- \exp[-k_0 q_m d]) \quad (50)$$

$$j \left(n_{\text{I}} \cos \theta \delta_{i0} - \frac{k_{\text{I},zi}}{k_0} R_i \right) = \sum_{m=1}^n v_{i,m} (c_m^+ - c_m^- \exp[-k_0 q_m d]) \quad (51)$$

が得られる。行列形式で表すために、新たに対角行列を三つ定義する。対角行列 \mathbf{X} の対角成分は $\exp[-k_0 q_m d]$ 、 \mathbf{Y}_{I} の対角成分は $k_{\text{I},zi}/k_0$ 、そして \mathbf{Y}_{II} の対角成分は $k_{\text{II},zi}/k_0$ である。これらの行列を用いると、 $z=0$ での境界条件は次のように書ける。

$$\begin{pmatrix} \delta_{i0} \\ j n_{\text{I}} \cos \theta \delta_{i0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ -j \mathbf{Y}_{\text{I}} \end{pmatrix} \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{W}\mathbf{X} \\ \mathbf{V} & -\mathbf{V}\mathbf{X} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c}^+ \\ \mathbf{c}^- \end{pmatrix} \quad (52)$$

同様に、 $z=d$ での境界条件を考えると、

$$\sum_{m=1}^n w_{i,m} (c_m^+ \exp[-k_0 q_m d] + c_m^-) = T_i \quad (53)$$

$$\sum_{m=1}^n v_{i,m} (c_m^+ \exp[-k_0 q_m d] - c_m^-) = j \frac{k_{\text{II},zi}}{k_0} T_i \quad (54)$$

が得られ、行列形式に直すと、

$$\begin{pmatrix} \mathbf{W}\mathbf{X} & \mathbf{W} \\ \mathbf{V}\mathbf{X} & -\mathbf{V} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c}^+ \\ \mathbf{c}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ j \mathbf{Y}_{\text{II}} \end{pmatrix} \mathbf{T} \quad (55)$$

とかける。式 (52)-(55) は、展開の次数を n とすると $4n$ 本の関係式を表し、 $4n$ 個の未知数 \mathbf{R} 、 \mathbf{T} 、 \mathbf{c}^+ 、 \mathbf{c}^- に関する連立一次方程式である。

この方程式を解くもっとも直接的な方法は、全ての未知数を同時に解く方法である。すなわち方程式全体を

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & -\mathbf{W} & -\mathbf{W}\mathbf{X} \\ -j \mathbf{Y}_{\text{I}} & \mathbf{0} & -\mathbf{V} & \mathbf{V}\mathbf{X} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & -\mathbf{W}\mathbf{X} & -\mathbf{W} \\ \mathbf{0} & j \mathbf{Y}_{\text{II}} & -\mathbf{V}\mathbf{X} & \mathbf{V} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{T} \\ \mathbf{c}^+ \\ \mathbf{c}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta_{i0} \\ -j n_{\text{I}} \cos \theta \delta_{i0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (56)$$

のように扱って、全ての未知数に関して同時に解く。ただし行列の次元が大きいためこの方法は効率的ではない。一見よさそうな別の方法は、式 (55) から係数 \mathbf{c}^+ と \mathbf{c}^- について解き、その結果を式 (52) 代入する方法である。しかし、

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c}^+ \\ \mathbf{c}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}\mathbf{X} & \mathbf{W} \\ \mathbf{V}\mathbf{X} & -\mathbf{V} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ j\mathbf{Y}_{\text{II}} \end{pmatrix} \mathbf{T} \quad (57)$$

の中の逆行列は、数値的不安定性を引き起こす可能性が高い。なぜなら、その行列中には対角行列 \mathbf{X} が含まれているが、その対角成分は $\exp[-k_0 q_m d]$ である。高次のエバネッセント波 (q_m が大きい値を持つ) やグレーティング領域が厚い場合 (d が大きい) には、その成分は実質的にゼロになる。連立一次方程式を解く標準的な方法であるガウスの消去法を思い出すと、ピボットがゼロになると計算はそこでストップしなければならない。小さな値のピボットで無理に計算を進めると、その数で割り算を行うために数値的不安定性の原因になる。

そこで先に \mathbf{R} と \mathbf{T} を消去して係数 \mathbf{c}^+ と \mathbf{c}^- を決定する手順を踏むのがよい。すなわち、式 (52) の上側を \mathbf{R} について解くと、

$$\mathbf{R} = \mathbf{W}\mathbf{c}^+ + \mathbf{W}\mathbf{X}\mathbf{c}^- - \mathbf{a}_1 \quad (58)$$

のようになる ($\mathbf{a}_1 \equiv \delta_{i0}$ と定義した)。また、下側の式に代入すると、

$$\mathbf{a}_2 - j\mathbf{Y}_{\text{I}}\mathbf{R} = \mathbf{V}\mathbf{c}^+ - \mathbf{V}\mathbf{X}\mathbf{c}^- \quad (59)$$

$$\mathbf{a}_2 - j\mathbf{Y}_{\text{I}}(\mathbf{W}\mathbf{c}^+ + \mathbf{W}\mathbf{X}\mathbf{c}^- - \mathbf{a}_1) = \mathbf{V}\mathbf{c}^+ - \mathbf{V}\mathbf{X}\mathbf{c}^- \quad (60)$$

$$(\mathbf{V} + j\mathbf{Y}_{\text{I}}\mathbf{W})\mathbf{c}^+ + (-\mathbf{V}\mathbf{X} + j\mathbf{Y}_{\text{I}}\mathbf{W}\mathbf{X})\mathbf{c}^- = \mathbf{a}_2 + j\mathbf{Y}_{\text{I}}\mathbf{a}_1 \quad (61)$$

になる。 $\mathbf{a}_2 \equiv jn_{\text{I}} \cos \theta \delta_{i0}$ と定義した。一方、式 (55) の上側からは、

$$\mathbf{T} = \mathbf{W}\mathbf{X}\mathbf{c}^+ + \mathbf{W}\mathbf{c}^- \quad (62)$$

となるので、これを下側の式に代入すると、

$$\mathbf{V}\mathbf{X}\mathbf{c}^+ - \mathbf{V}\mathbf{c}^- = j\mathbf{Y}_{\text{II}}\mathbf{T} \quad (63)$$

$$\mathbf{V}\mathbf{X}\mathbf{c}^+ - \mathbf{V}\mathbf{c}^- = j\mathbf{Y}_{\text{II}}(\mathbf{W}\mathbf{X}\mathbf{c}^+ + \mathbf{W}\mathbf{c}^-) \quad (64)$$

$$(\mathbf{V}\mathbf{X} - j\mathbf{Y}_{\text{II}}\mathbf{W}\mathbf{X})\mathbf{c}^+ + (-\mathbf{V} - j\mathbf{Y}_{\text{II}}\mathbf{W})\mathbf{c}^- = \mathbf{0} \quad (65)$$

これらを、まとめて行列の形にすると、次の連立一次方程式になる。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V} + j\mathbf{Y}_{\text{I}}\mathbf{W} & -\mathbf{V}\mathbf{X} + j\mathbf{Y}_{\text{I}}\mathbf{W}\mathbf{X} \\ \mathbf{V}\mathbf{X} - j\mathbf{Y}_{\text{II}}\mathbf{W}\mathbf{X} & -\mathbf{V} - j\mathbf{Y}_{\text{II}}\mathbf{W} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c}^+ \\ \mathbf{c}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_2 + j\mathbf{Y}_{\text{I}}\mathbf{a}_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (66)$$

この一次方程式は安定に解くことができる。得られた \mathbf{c}^+ と \mathbf{c}^- を式 (58) と (62) に代入すると、 \mathbf{R} と \mathbf{T} が得られ、振幅反射率と透過率を計算することが出来る。

最後に、各モードへの回折効率 (反射側 DE_{ri} 、透過側 DE_{ti}) はポインティングベクトルの z 成分の比から得られ、

$$DE_{ri} = R_i R_i^* \Re \left(\frac{k_{\text{I},zi}}{k_0 n_{\text{I}} \cos \theta} \right) \quad (67)$$

$$DE_{ti} = T_i T_i^* \Re \left(\frac{k_{\text{II},zi}}{k_0 n_{\text{I}} \cos \theta} \right) \quad (68)$$

を用いて計算できる。([追記] ポインティングベクトルの計算については最後の節にまとめた)

3 TM波の場合

3.1 各領域の電磁場を級数展開で表す

次に、磁場がグレーティングに平行な場合 (TM モード) を考える。基本的には TE モードの場合と同様であるが、逆誘電率も展開しておくとう分かりやすい。すなわち、

$$\frac{1}{\epsilon(x)} = \sum_h \kappa_h \exp\left(j \frac{2\pi h x}{\Lambda}\right) \quad (69)$$

のように展開すると、その係数は

$$\kappa_h = \frac{1}{\Lambda} \int_{-\Lambda/2}^{\Lambda/2} \frac{1}{\epsilon(x)} \exp\left(-j \frac{2\pi h x}{\Lambda}\right) dx \quad (70)$$

の定義式から、

$$\kappa_h = \left(\frac{1}{n_{\text{rd}}^2} - \frac{1}{n_{\text{gr}}^2} \right) \frac{\sin(\pi h f)}{\pi h} \quad (h \text{ が } 0 \text{ 以外のとき}) \quad (71)$$

$$\kappa_0 = \frac{1}{n_{\text{rd}}^2} f + \frac{1}{n_{\text{gr}}^2} (1 - f) \quad (72)$$

である。また κ_{i-j} を ij 成分とする行列 \mathbf{G} を後のために定義しておく。

入射光の磁場の y 成分を

$$H_{\text{inc},y} = \exp[-jk_0 n_{\text{I}} (\sin \theta x + \cos \theta z)] \quad (73)$$

のように表す。(入射波は $z < 0$ の領域で定義されるが、[1] では $z > 0$ とあり、誤りであると思われる。) 波数ベクトルの定義は TE 波の場合と同様に、

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \quad (74)$$

$$k_{xi} = k_0 (n_{\text{I}} \sin \theta - i(\lambda_0/\Lambda)) \quad (75)$$

$$k_{l,zi} = \begin{cases} +k_0 \sqrt{n_l^2 - (k_{xi}/k_0)^2} & (k_0 n_l > |k_{xi}| \text{ のとき}) \\ -jk_0 \sqrt{(k_{xi}/k_0)^2 - n_l^2} & (k_0 n_l < |k_{xi}| \text{ のとき}) \end{cases} \quad (76)$$

である。 l には領域を示す添え字 (I か II) が入る。入射領域と透過領域での磁場は次のように展開できる。

$$H_{\text{I},y} = H_{\text{inc},y} + \sum_i R_i \exp\left[-j \left(k_{xi} x - k_{\text{I},zi} z\right)\right] \quad (77)$$

$$H_{\text{II},y} = \sum_i T_i \exp\left[-j \left(k_{xi} x + k_{\text{II},zi} (z - d)\right)\right] \quad (78)$$

マクスウェルの方程式から、

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \epsilon(x) \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (79)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mu_0 \mathbf{H} \quad (80)$$

が成立するので、電場の x 成分と磁場の y 成分とを書き下すと、

$$\frac{\partial H_{\text{gr},y}}{\partial z} = -j\omega \epsilon_0 \epsilon(x) E_{\text{gr},x} \quad (81)$$

$$\frac{\partial E_{\text{gr},x}}{\partial z} = -j\omega \mu_0 H_{\text{gr},y} + \frac{\partial E_{\text{gr},z}}{\partial x} \quad (82)$$

がえられる。(論文 [1] では、下側の式の右辺第二項電場の添え字に誤りがあると思われる。) さらに、式 (79) から $E_{\text{gr},z}$ は、

$$E_{\text{gr},z} = \frac{-j}{\omega \epsilon(x) \epsilon_0} \frac{\partial H_{\text{gr},y}}{\partial x} \quad (83)$$

であるから、これを用いて式 (82) から電場の z 成分を消去すると

$$\frac{\partial E_{\text{gr},x}}{\partial z} = -j\omega\mu_0 H_{\text{gr},y} - \frac{j}{\omega\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\epsilon(x)} \frac{\partial H_{\text{gr},y}}{\partial x} \right) \quad (84)$$

が得られる。

磁場と電場を次のように展開する。

$$H_{\text{gr},y} = \sum_i U_{yi}(z) \exp(-jk_{xi}x) \quad (85)$$

$$E_{\text{gr},x} = j \left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \right)^{1/2} \sum_i S_{xi} \exp(-jk_{xi}x) \quad (86)$$

これらの展開式と誘電率 $\epsilon(x)$ に関する級数展開式を式 (81) に代入すると、右辺の係数は $-j\omega\epsilon_0 \times j \left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \right)^{1/2} = k_0$ になるから、各 i 成分について比較することで

$$\frac{\partial U_{yi}(z)}{\partial z} = k_0 \sum_l \epsilon_{i-l} S_{xl}(z) \quad (87)$$

が得られる。同様にして、級数展開式を式 (84) に代入することで、

$$\frac{\partial S_{xi}(z)}{\partial z} = -k_0 U_{yi}(z) + \frac{1}{k_0} \sum_l k_{xi} \kappa_{i-l} k_{xl} U_{yl}(z) \quad (88)$$

が得られる。このとき右辺第一項、第二項の係数は

$$-j\omega\mu_0 / \left(j \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \right) = -\sqrt{\mu_0\epsilon_0}\omega = -k_0 \quad (89)$$

$$-\frac{j}{\omega\epsilon_0} / \left(j \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \right) = -\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}\omega} = -\frac{1}{k_0} \quad (90)$$

のように計算できる。また、第二項の計算では磁場を微分した後に、逆誘電率の展開とあわせて k_{xi} の項についてまとめ、もう一度微分することで計算をすすめる。

式 (87)(88) を行列形式に直すと、

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{U}_y}{\partial(z')} \\ \frac{\partial \mathbf{S}_x}{\partial(z')} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_y \\ \mathbf{S}_x \end{pmatrix} \quad (91)$$

となる。ここで行列 \mathbf{B} は

$$\mathbf{B} = \mathbf{K}_x \mathbf{G} \mathbf{K}_x - \mathbf{I} \quad (92)$$

で定義される。(逆誘電率のフーリエ係数で定義される行列 \mathbf{G} は、無限次元まで考慮すれば、誘電率のフーリエ係数で定義される行列 \mathbf{E} の逆行列に \mathbf{E}^{-1} 等しい。そのため論文 [1] では \mathbf{G} を \mathbf{E}^{-1} に置き換えて表記してある。TM 偏光の場合、 \mathbf{G} と \mathbf{E}^{-1} 、 \mathbf{G}^{-1} と \mathbf{E} の置き換えは収束性に大きな影響を与えることが論文 [2, 3] で報告されている。) 上の式を一本にまとめると、

$$\frac{\partial^2 \mathbf{U}_y}{\partial(z')^2} = \mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{U}_y \quad (93)$$

がえられ、これが \mathbf{U} に関する固有値方程式になる。これを解くことで得られる固有値の二乗根から z 方向の波数 q_m が得られる。これを用いて、TE 波の場合と同様に、グレーティング領域の電場を次のように展開して表す。

$$U_{yi}(z) = \sum_{m=1}^n w_{i,m} (c_m^+ \exp[-k_0 q_m z] + c_m^- \exp[k_0 q_m (z - d)]) \quad (94)$$

$$S_{xi}(z) = \sum_{m=1}^n v_{i,m} (-c_m^+ \exp[-k_0 q_m z] + c_m^- \exp[k_0 q_m (z - d)]) \quad (95)$$

$w_{i,m}$ は m 番目の固有ベクトルを m 行に並べた行列 \mathbf{W} の im 成分である。 $v_{i,m}$ は行列 \mathbf{V} の im 成分で、その定義は $\mathbf{V} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{W}\mathbf{Q}$ である。行列 \mathbf{Q} は TE 波の場合と同様に、 q_m を対角成分とする対角行列である。 \mathbf{V} の定義式は、式 (91) の上側に注目し、左辺の U_i の z' 微分の項から行列 $\mathbf{W}\mathbf{Q}$ が表れ、右辺は $\mathbf{E}\mathbf{S}$ であることから導かれる。

(疑問) 行列 $\mathbf{E}\mathbf{B}$ は必ず実数の固有値を持つのだろうか。 \mathbf{B} の第二項は単位行列なので、 \mathbf{E} はエルミート行列であることから問題ない。しかし、第一項からくる行列 $\mathbf{E}\mathbf{K}_x\mathbf{G}\mathbf{K}_x$ に関しては、

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}\mathbf{K}_x\mathbf{G}\mathbf{K}_x)^\dagger &= \mathbf{K}_x^\dagger\mathbf{G}^\dagger\mathbf{K}_x^\dagger\mathbf{E}^\dagger \\ &= \mathbf{K}_x\mathbf{G}\mathbf{K}_x\mathbf{E} \end{aligned}$$

となる。それぞれの行列はエルミートではあるが、積の順番が逆になるので、行列の積全体としては、一般的にエルミート行列にならない。固有値が実数であるためには、必ずしもエルミート行列である必要は無い(その逆は必ず成立する)。しかし、上で定義された $\mathbf{E}\mathbf{B}$ が実の固有値を持つのかは疑問のままである。

3.2 境界条件を課す

領域 I と II の電場の x 成分は、マクスウェルの方程式から得られる式 (81) より

$$E_x = \frac{1}{-j\omega\epsilon_0} \frac{\partial H_y}{\partial z} \quad (96)$$

$$= +j\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{1}{n^2 k_0} \frac{\partial H_y}{\partial z} \quad (97)$$

で計算できる。この結果を加えて境界条件を課すべき三つの領域での電磁場をまとめて書くと次のようになる。

領域 I

$$H_{\text{I},y} = H_{\text{inc},x} + \sum_i R_i \exp\left[-j(k_{xi}x - k_{\text{I},zi}z)\right] \quad (98)$$

$$H_{\text{inc},y} = \exp[-jk_0 n_{\text{I}}(\sin\theta x + \cos\theta z)] \quad (99)$$

$$E_{\text{I},x} = E_{\text{inc},x} + j\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{1}{n_{\text{I}}^2 k_0} \sum_i (+jk_{\text{I},zi}) R_i \exp\left[-j(k_{xi}x - k_{\text{I},zi}z)\right] \quad (100)$$

$$E_{\text{inc},x} = j\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{1}{n_{\text{I}}^2 k_0} (-jk_0 n_{\text{I}} \cos\theta) \exp[-jk_0 n_{\text{I}}(\sin\theta x + \cos\theta z)] \quad (101)$$

グレーティング領域

$$H_{\text{gr},y} = \sum_i U_{yi}(z) \exp(-jk_{xi}x) \quad (102)$$

$$E_{\text{gr},x} = j\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sum_i S_{xi} \exp(-jk_{xi}x) \quad (103)$$

$$U_{yi}(z) = \sum_{m=1}^n w_{i,m} (c_m^+ \exp(-k_0 q_m z) + c_m^- \exp[k_0 q_m(z-d)]) \quad (104)$$

$$S_{xi}(z) = \sum_{m=1}^n v_{i,m} (-c_m^+ \exp(-k_0 q_m z) + c_m^- \exp[k_0 q_m(z-d)]) \quad (105)$$

領域 II

$$H_{\text{II},y} = \sum_i T_i \exp(-j(k_{xi}x + k_{\text{II},zi}(z-d))) \quad (106)$$

$$E_{\text{II},x} = j\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{1}{n_{\text{II}}^2 k_0} \sum_i T_i (-jk_{\text{II},zi}) \exp(-j(k_{xi}x + k_{\text{II},zi}(z-d))) \quad (107)$$

境界面 $z = 0$ での磁場と電場の接線成分に関する接続条件を用いると、係数に関する方程式が次のように得られる。

$$\delta_{i0} + R_i = \sum_{m=1}^n w_{i,m} (c_m^+ + c_m^- \exp[-k_0 q_m d]) \quad (108)$$

$$j \left(\frac{\cos \theta}{n_{\text{I}}} \delta_{i0} - \frac{k_{\text{I},zi}}{k_0 n_{\text{I}}^2} R_i \right) = \sum_{m=1}^n v_{i,m} (c_m^+ - c_m^- \exp[-k_0 q_m d]) \quad (109)$$

これを行列の形で書くと、

$$\begin{pmatrix} \delta_{i0} \\ j \cos \theta \delta_{i0} / n_{\text{I}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ -j \mathbf{Z}_{\text{I}} \end{pmatrix} \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{W}\mathbf{X} \\ \mathbf{V} & -\mathbf{V}\mathbf{X} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c}^+ \\ \mathbf{c}^- \end{pmatrix} \quad (110)$$

になる。行列 \mathbf{Z}_{I} は対角行列で、対角成分は $k_{\text{I},zi}/k_0 n_{\text{I}}^2$ で定義される。([1] では上の式に対応するところで、左辺第二項の \mathbf{Z}_{I} の前の虚数単位が抜けていると思われる。) 同様に 行列 \mathbf{Z}_{II} を対角成分 $k_{\text{II},zi}/k_0 n_{\text{II}}^2$ を用いて定義しておく。

一方、 $z = d$ での連続条件からは、次式が得られる。

$$\sum_{m=1}^n w_{i,m} (c_m^+ \exp[-k_0 q_m d] + c_m^-) = T_i \quad (111)$$

$$\sum_{m=1}^n v_{i,m} (c_m^+ \exp[-k_0 q_m d] - c_m^-) = j \frac{k_{\text{II},zi}}{k_0 n_{\text{II}}^2} T_i \quad (112)$$

行列の形では、

$$\begin{pmatrix} \mathbf{W}\mathbf{X} & \mathbf{W} \\ \mathbf{V}\mathbf{X} & -\mathbf{V} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c}^+ \\ \mathbf{c}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ j \mathbf{Z}_{\text{II}} \end{pmatrix} \mathbf{T} \quad (113)$$

である。TE 波と同様に式 (110) と (113) から、 \mathbf{R} と \mathbf{T} を決定することが出来る。その場合には、最初に展開係数 \mathbf{c}^+ と \mathbf{c}^- を決定してから \mathbf{R} と \mathbf{T} について解くほうが良い。

最後に反射側、透過側の回折効率 (DE_{ri} と DE_{ti}) は

$$DE_{ri} = R_i R_i^* \Re \left(\frac{k_{\text{I},zi}}{k_0 n_{\text{I}} \cos \theta} \right) \quad (114)$$

$$DE_{ti} = T_i T_i^* \Re \left(\frac{k_{\text{II},zi}}{n_{\text{II}}^2} \right) / \left(\frac{k_0 \cos \theta}{n_{\text{I}}} \right) \quad (115)$$

のように計算できる。

4 ポインティングベクトルの計算

反射率や透過率の計算に必要な、平面波のポインティングベクトル $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ の計算を復習しておく。

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp[-j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \exp[-j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]$$

のように電磁場を複素表示している場合、ポインティングベクトルのような積の量の計算は、通常は実部をとってから計算しないと正しい結果が得られない。しかし、積の計算の後に時間平均が続く場合には、複素共役を用いて、

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*$$

のように計算することができる。 $\bar{\mathbf{S}}$ は時間平均の意味でバーをつけた。 $E_r = rE_{inc}$ のように電場の振幅の比として反射率が定義されている場合 (TE 波) には、電場が残るように計算する。

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{S}} &= \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \left(\frac{1}{-j\omega\mu_0} \nabla \times \mathbf{E} \right)^* \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \left(\frac{-j}{-j\omega\mu_0} \mathbf{k} \times \mathbf{E} \right)^* \\
 &= \frac{1}{2\omega\mu_0} \mathbf{E}_0 \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0^*) \\
 &= \frac{1}{2\omega\mu_0} (\mathbf{k}(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^*) - \mathbf{E}_0^*(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k})) \\
 &= \frac{1}{2\omega\mu_0} \mathbf{k} |\mathbf{E}_0|^2
 \end{aligned}$$

のようになるから、反射界面が xy 面に平行 (z 軸に垂直である場合) には、 \mathbf{k} の z 成分が反射率の計算に必要な量になる。たとえば $k_z = nk_0 \cos \theta$ のように書ける場合には、波数の大きさの中に屈折率が含まれる。エネルギー反射率、エネルギー透過率を計算するときには、 $|\mathbf{E}_0|^2$ の部分に振幅反射率、振幅透過率の絶対値二乗が表れる。

もう少しだけ計算を進めると、

$$\begin{aligned}
 |\bar{\mathbf{S}}| &= \frac{1}{2\omega\mu_0} |\mathbf{k}| |\mathbf{E}_0|^2 \\
 &= \frac{1}{2ck_0\mu_0} nk_0 |\mathbf{E}_0|^2 \\
 &= \frac{c}{n} \frac{1}{2c^2\mu_0} n^2 |\mathbf{E}_0|^2 \\
 &= \frac{c}{n} \frac{\epsilon\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}_0|^2
 \end{aligned}$$

となって、当然のことであるがポインティングベクトルの大きさは、光速 c/n と単位体積中の平均エネルギーの積になっている。

一方、磁場の振幅の比として反射率が定義されている場合には、磁場が残るように計算をする。

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{S}} &= \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{j\omega\epsilon\epsilon_0} (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H}^* \\
 &= \frac{1}{2} \frac{-j}{j\omega\epsilon\epsilon_0} (\mathbf{k} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H}^* \\
 &= \frac{1}{2\omega\epsilon\epsilon_0} \mathbf{H}_0^* \times (\mathbf{k} \times \mathbf{H}_0) \\
 &= \frac{1}{2\omega\epsilon\epsilon_0} (\mathbf{k}(\mathbf{H}_0^* \cdot \mathbf{H}_0) - \mathbf{H}_0(\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{k})) \\
 &= \frac{1}{2\omega n^2 \epsilon_0} \mathbf{k} |\mathbf{H}_0|^2
 \end{aligned}$$

であるので、屈折率の二乗が分母に表れる。反射率のように同じ空間を伝搬する平面波の比を考える場合には、割合を計算するとキャンセルするので屈折率の値はそのままは影響しない。一方、透過率のように媒質が異なる場合には、例えば $k_z = nk_0 \cos \theta$ とすると、 n の一つがキャンセルされて、式 (115) にあるように $k_0 \cos \theta / n$ の形があらわれる。

< この節で計算に用いた関係式のまとめ >

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0 \mathbf{H} \tag{116}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\epsilon_0\mathbf{E} \quad (117)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (118)$$

$$\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (119)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (120)$$

(130514 修正)